**Inspectoratul Şcolar al Municipiului Bucureşti**

# Olimpiada de Matematică
# Faza locală, 17 februarie 2007
# Soluţii - clasa a IX-a

**Subiectul I**

a) Observăm că $x = 1$ este soluţie pentru orice $E_n$. . . . . . . . . . **4 puncte**

b) $\Delta' = b^2 - ac + (2b - a - c)n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{Z} \Rightarrow a + c = 2b$. Apoi

• $a + n \neq 0 \Rightarrow \Delta' = \frac{(a-c)^2}{4}$, $x_{1,2} = \frac{b+n\pm(a-c)/2}{a+n} \in \mathbb{Q}$. . . . . . . . . . . . . . . **4 puncte**

• $a + n = 0 \Rightarrow x = \frac{c+n}{2b+2n} \in \mathbb{Q}$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **1 punct**

**Subiectul II**

a) Din asemănări $\frac{GP}{PC} = \frac{GY}{BC} = \frac{GY}{2MC} = \frac{1}{2}\frac{AG}{AM} = \frac{k}{2}$. . . . . . . . . . . . . **2 puncte**

b) $\overrightarrow{CP} = \frac{2}{k+2}\overrightarrow{CG} = \frac{2}{k+2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AG}) = \frac{2}{k+2}(-\overrightarrow{AC} + k\overrightarrow{AM})$

$= \frac{2}{k+2}(-\overrightarrow{AC} + \frac{k}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})) = \frac{k}{k+2}\overrightarrow{AB} + \frac{k-2}{k+2}\overrightarrow{AC}$ . . . . . . . . . . . . . . . . **4 puncte**

c) Rezultă

$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) + \frac{k}{k+2}\overrightarrow{AB} + \frac{k-2}{k+2}\overrightarrow{AC} = \frac{k-1}{2(k+2)}\overrightarrow{AB} + \frac{3k-2}{2(k+2)}\overrightarrow{AC}$.

Când $G$ este centrul de greutate, $k = \frac{2}{3}$, $\overrightarrow{MP} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$. Analog avem $\overrightarrow{MQ} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$, de unde concluzia. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **3 puncte**

**Subiectul III**

a) Aşezăm pătratul cu două laturi pe verticală. Numărând după colţurile din stânga sus avem $n^2$ pătrate de latură 1, $(n-1)^2$ pătrate cu latura 2, ... $1^2$ pătrate de latură $n$. Prin adunare obţinem concluzia. . . . . . . . . . **4 puncte**

b) Observăm că pentru fiecare pătrat de la a) avem două triunghiuri cu ipotenuza verticală, două triunghiuri cu ipotenuza orizontală, două triunghiuri cu ipotenuza pe direcţia unei diagonale şi două triunghiuri cu ipotenuza pe direcţia celeilalte diagonale. Pe de altă parte, nu avem şi alte triunghiuri în afară de cele enumerate. Astfel, numărul triunghiurilor este de opt ori mai mare decât cel al pătratelor. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **5 puncte**

**Subiectul IV (V. Zidaru, Gazeta Matematică)**

a) Inducţie după $n$. Pentru $n = 1$, $3^2 = 2 \cdot 4 + 1$, deci câtul este 4. Presupunem acum că $3^{2^n} = 2^n(2q) + 1 = 2^{n+1}q + 1$. Atunci

$$3^{2^{n+1}} = 3^{2^n \cdot 2} = \left(3^{2^n}\right)^2 = (2^{n+1}q + 1)^2 = 2^{n+1} \cdot 2(2^n q^2 + q) + 1,$$

deci la împărţirea cu $2^{n+1}$ obţinem câtul par $2(2^n q^2 + q)$. . . . . . . . **4 puncte**

b) Conform a), $a_{2^n}, n \in \mathbb{N}^*$ este par.

Apoi, deoarece $3^n > n$ (inducţie !), $a_{3^n} = 3^{3^n - n}$ este divizibil cu 3.

În sfârşit, arătăm ca la a) că $3^{4^n}$ dă la împărţirea cu $4^n$ restul 1 şi un cât divizibil cu 5, deci $a_{4^n}$ este divizibil cu 5. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **5 puncte**